Invariance causale contrôlée pour les systèmes max-plus linéaires

Veronica Bartolucci[2], Jean Jacques Loiseau[1], Claude Martinez[1], and David Scaradozzi[2]

[1] Nantes Université, École Centrale Nantes, CNRS, LS2N, UMR 6004, F-44000 Nantes, France
Jean-Jacques.Loiseau@ls2n.fr, Claude.Martinez@ls2n.fr
[2] Department of Information Engineering, Università Politecnica delle Marche, Ancona, Italy
v.bartolucci@univpm.it, d.scaradozzi@univpm.it

Abstract

In this paper, the concept of causal controlled invariance, in the framework of max-plus linear systems, is explored in depth. This concept is very useful and applicable to various control problems for such systems, and although it has already been presented in the literature, it is currently represented, and defined only through sufficient conditions that allow to verify if a module has this property. In order to design appropriate control laws for these systems, in which specifications and constraints are given in terms of vector space, it is indeed necessary to consider the concepts of controlled invariance and causal controlled invariance. However, for the latter no algorithm has so far been designed to test the sufficient conditions already defined or other equivalent conditions. It is for this reason that, in addition to various considerations on this topic, a preliminary version of an algorithm is presented within this work. In this way, it makes possible to check more easily whether a module is causally controlled invariant or not. We introduce the concept of causal projection relative to a matrix, which plays a central role in the development of the concepts that are presented. The described algorithm has been implemented on ScicosLab software package. It consists in a procedure that is applied recursively to each row of the matrix under consideration, until convergence is achieved, which is ensured within a defined number of steps. Some examples are finally provided, to illustrate how the algorithm permits to confirm whether or not a given module is causally controlled invariant.

Résumé

Dans cet article, le concept d'invariance causale contrôlée, dans le cadre des systèmes max-plus linéaires, est exploré en profondeur. Ce concept est très utile et applicable à divers problèmes de conception de lois de commande pour ces systèmes. Bien qu'il ait déjà été présenté dans la littérature, il est caractérisé et défini uniquement par des conditions suffisantes qui permettent de vérifier si un module possède cette propriété. Afin de concevoir des lois de commande appropriées pour ces systèmes, lorsque les spécifications et les contraintes sont données en termes d'espace vectoriel, il est en effet nécessaire de considérer les concepts d'invariance contrôlée et d'invariance causale contrôlée. Cependant, pour cette dernière, aucun algorithme n'a été conçu jusqu'à présent pour tester les conditions suffisantes déjà définies ou d'autres conditions équivalentes. C'est pour cette raison qu'en plus de diverses considérations sur ce sujet, un algorithme est présenté dans le cadre de ce travail. Il permet de vérifier plus facilement si un module est invariant par contrôle causal ou non. Le concept de projection causale relatif à une matrice est introduit et joue un rôle central dans ce développement. L'algorithme décrit a été implémenté sur le progiciel ScicosLab. Il consiste en une procédure appliquée récursivement à chaque ligne de la matrice considérée jusqu'à ce que la convergence soit atteinte, ce qui est toujours assuré en un nombre fini d'étapes. Quelques exemples d'utilisation de cet algorithme sont finalement présentés, pour vérifier si un module donné est ou n'est pas invariant par contrôle causal.

1 Introduction

Au cours des dernières décennies, le concept d'invariance contrôlée, pas nécessairement causale, a été largement étudié dans le domaine des systèmes dynamiques. En fait, l'invariance contrôlée, également appelée (A,B)-invariance, a prouvé son efficacité dans la résolution d'un large éventail de problèmes de contrôle classiques. Nous rappelons que pour les systèmes dynamiques sur un corps, l'(A,B)-invariance d'un sous-espace vectoriel est équivalente à son invariance avec au moins un retour d'état statique [1, 2]. Cependant, pour les systèmes avec des coefficients sur des anneaux ou demi-anneaux, cette propriété n'est généralement pas valide puisque dans ce cas l'invariance par retour d'état implique l'(A,B)-invariance, mais l'inverse n'est pas toujours vrai [3, 4].

La notion d'(A,B)-invariance a été un pilier de l'approche géométrique pour la conception des lois de commande des systèmes linéaires depuis les années 1970 [6, 7]. Au fil des années, différents auteurs ont étendu l'application de cette approche géométrique aux systèmes sur des anneaux [3, 5] et des demi-anneaux, tels que les systèmes max-plus [4]. Un travail significatif a été réalisé par Conte et Perdon [5] avec le concept d'invariance de retour d'état dynamique pour les modules sur des anneaux principaux. De plus, dans l'article de Cardenas *et al.* [11], inspiré par le travail de Ito et Inaba [8], les auteurs ont obtenu différents résultats pour le demi-anneau $\mathbb{R}_{max}$, en introduisant des applications pour le contrôle des systèmes à événements discrets soumis à des contraintes temporelles. De nombreuses études se sont concentrées sur la recherche d'un retour d'état statique pour résoudre des problèmes définis en termes de contraintes ou de comportement asymptotique [4, 15–17, 20–24]. D'autres travaux ont également abordé des problèmes d'observabilité dans des termes similaires [9, 10, 30–32].

Par conséquent, l'invariance contrôlée a été abordé aussi dans le contexte des systèmes max-plus linéaires et s'est avéré très utile et applicable à divers problèmes de commande dans de tels systèmes, qui trouvent des applications dans plusieurs domaines, dont la théorie des graphes, la programmation linéaire entière, les systèmes de production et de planification, etc. Un travail notable est [9], dans lequel les notions d'espaces invariants conditionnés et contrôlés sont étendues aux systèmes dynamiques linéaires sur des demi-anneaux max-plus ou tropicaux. Un théorème de dualité y est établi et utilisé pour construire des observateurs dynamiques appliqués à un système de fabrication. Un autre article lié à ce sujet concerne le problème de synchronisation des systèmes linéaires max-plus, formulé en termes d'invariance contrôlée et de coreachabilité [26], tandis que d'autres travaux ont examiné des lois de commande à retour d'état statique, bien qu'elles ne soient pas nécessairement linéaires [23, 25].

Une considération particulière est que, dans l'algèbre max-plus, les fonctions statiques ne sont pas nécessairement causales, comme l'ont analysé T. Bousch [18] et B. Cottenceau *et al.* [19]. Cependant, la mise en œuvre en ligne des lois de commande nécessite une vérification de cet aspect, comme le souligne [25], où la méthode de double description d'Allamigeon *et al.* [14, 27] est utilisée. Une autre contribution significative, qui peut donner une autre perspective sur la causalité, est le travail de Declerk [28], qui traite de la contrainte causale et propose différentes techniques avec l'utilisation du contrôle prédictif. Enfin, un autre travail qui mérite d'être mentionné est [29], qui utilise l'approche géométrique structurale au problème de l'appariement de modèles (de l'anglais *Model Matching Problem*) pour les systèmes linéaires positifs en introduisant une notion d'invariance contrôlée positive.

L'article est structuré de la manière suivante. La section 2 aborde les rappels et les résultats de base concernant l'algèbre max-plus, les demi-modules, les systèmes max-plus linéaires, ainsi que les concepts d'invariance contrôlée, de causalité et des opérateurs causaux. La section 3 est dédiée à l'invariance causale contrôlée, à la projection causale et à l'algorithme obtenu. Quelques exemples sont ensuite présentés dans la section 4, et une brève conclusion résume les concepts et les résultats obtenus dans l'article.

2 Concepts de base

2.1 L'algèbre max-plus

L'algèbre max-plus est une classe de systèmes algébriques discrets, connue comme un outil efficace pour la modélisation et l'analyse de systèmes à événements discrets temporisés, et pour l'évaluation de performance et la conception de systèmes en réseau. Dans ce système algébrique, les opérations *max* et *plus* de l'algèbre conventionnelle sont définies respectivement comme l'addition et la multiplication, quand cela n'introduit pas d'ambiguïté.

En désignant la droite réelle entière par $\mathbb{R}$, nous définissons le demi-anneau max-plus comme l'ensemble $\mathbb{R}_{\max} = \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$. Par conséquent, $\mathbb{R}_{\max}$ représente l'ensemble des nombres réels complété par $-\infty$, et les lois *max* et *plus*, avec lesquelles il est équipé, sont respectivement notées $\oplus$ et $\otimes$. Si $x, y \in \mathbb{R}_{\max}$, les deux opérationssont définies de la manière suivante : $x \oplus y = max(x,y)$, $x \otimes y = x + y$.

L'élément neutre pour l'opération $\oplus$ est ici $-\infty$ et l'élément neutre pour l'opération $\otimes$ est 0. Nous les notons respectivement ε et e. Dans cette structure, l'élément ε est absorbant pour la multiplication, c'est-à-dire que $x \otimes \varepsilon = \varepsilon \otimes x = \varepsilon$ pour tout $x \in \mathbb{R}_{\max}$. Étant donné que $x \oplus \varepsilon = \varepsilon \oplus x = x$ et $x \otimes e = e \otimes x = x$ sont valables pour tout $x \in \mathbb{R}_{\max}$, nous pouvons comprendre que ε et e jouent le rôle de 0 et 1 dans l'algèbre conventionnelle. Les lois $\oplus$ et $\otimes$ sont associatives, et la multiplication est distributive par rapport aux sommes finies, ce qui signifie que pour tout $a, b, c \in \mathbb{R}_{\max}$, $(a \oplus b) \otimes c = (a \otimes c) \oplus (b \otimes c)$ et $c \otimes (a \oplus b) = (c \otimes a) \oplus (c \otimes b)$. Par conséquent, $\mathbb{R}_{\max}$ possède une structure de demi-anneau. De plus, notons que l'opération $\oplus$ est commutative et que cette addition $\oplus$ est idempotente, ce qui signifie que pour tout $a \in \mathbb{R}_{\max}$, nous avons $a \oplus a = a$. Avec ces propriétés, on dit que $\mathbb{R}_{\max}$ est un dioïde [12]. De plus, comme dans $\mathbb{R}_{\max}$ l'opération $\otimes$ est également commutative, (alors qu'en général seul $\oplus$ l'est), on parle dans ce cas, grâce à cette propriété supplémentaire, d'un dioïde commutatif.

Un autre dioïde est le demi-anneau min-plus, défini comme l'ensemble $\mathbb{R}_{\min} = \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ équipé de l'addition $\min(a,b) = a \oplus' b$ et de la multiplication $a + b = a \otimes' b$. L'élément neutre est $+\infty$ et l'unité est 0. Les dioïdes $\overline{\mathbb{R}}_{\max}$ et $\overline{\mathbb{R}}_{\min}$ s'entendent comme l'ensemble $\mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$, muni respectivement des lois $\oplus, \otimes$, ou $\oplus', \otimes'$. Ces deux dioïdes sont complets en ce sens que les sommes $\oplus$ et $\oplus'$, même d'un nombre infini d'éléments, sont toujours bien définies dans ces ensembles. Notons que les multiplication $\otimes'$ et $\otimes$ sont différentes car par convention nous avons $-\infty \otimes +\infty = -\infty$, alors que $-\infty \otimes' +\infty = +\infty$. Les deux opérations coïncident avec l'addition usuelle lorsqu'elles sont appliquées à des nombres réels.

Les notations $\oplus$ et $\otimes$ sont bien sûr étendues aux vecteurs et aux matrices : en fait, $\mathbb{R}_{\max}^{p \times q}$ représente l'ensemble des matrices de taille $p \times q$ avec coefficients dans $\mathbb{R}_{\max}$ et $p, q \in \mathbb{N}$. Pour deux matrices $A, B \in \mathbb{R}_{\max}^{m \times n}$, la somme $A \oplus B$ est définie comme $(A \oplus B)_{ij} = A_{ij} \oplus B_{ij}$. Si $A \in \mathbb{R}_{\max}^{p \times n}$ et $B \in \mathbb{R}_{\max}^{n \times m}$, le produit $A \otimes B$ est défini par $(A \otimes B)_{ij} = \bigoplus_{k=1}^{n} A_{ik} \otimes B_{kj}$. Ce produit est souvent noté AB. La matrice nulle est symbolisée par ε et la matrice unité I_n est une matrice $n \times n$ où les éléments diagonaux sont $e = 0$ et les éléments hors diagonale sont ε. Le vecteur dont toutes les composantes sont égales à $e = 0$ est noté 0. La notation $\otimes$ est également utilisée pour représenter le produit externe d'un scalaire $\lambda \in \mathbb{R}_{\max}$ et d'une matrice $A \in \mathbb{R}_{\max}^{p \times n}$, défini comme $(\lambda \otimes A)_{ij} = \lambda + A_{ij}$, pour $i = 1$ à p et $j = 1$ à n.

En remplaçant, dans les notions d'espace vectoriel ou de module, le corps ou l'anneau de scalaires par un demi-anneau, on obtient ce qui est appelé dans la littérature un demi-module, un moduloïde [12] ou tout simplement un module[1]. Nous nous intéressons notamment aux sous-demi-modules du produit cartésien $\mathbb{R}_{\max}^{n}$, et aux modules de type fini, générés par une famille finie de vecteurs de $\mathbb{R}_{\max}^{n}$.

Si $M \in \mathbb{R}_{\max}^{n \times m}$, on peut définir $\operatorname{Im} M = \{x \in \mathbb{R}_{\max}^{n} \mid \exists v \in \mathbb{R}_{\max}^{m},\ x = Mv\}$. En d'autres termes, $\operatorname{Im} M$

[1] Il y a quelques années, Christophe Reutenauer fit remarquer à Édouard Wagneur que le terme module est préférable, puisque les définitions d'un module et d'un demi-module sont identiques, hormis le fait que l'ensemble de référence est un anneau ou un demi-anneau. Ils discutaient de la notion de dimension pour ces objets. En effet, anneaux ou demi-anneaux posent les mêmes questions pour ce type de propriété. C'est pourquoi nous suivons cet avis, et utilisons indifféremment les termes module ou demi-module dans cet article.

est généré par les colonnes de M. A cet égard, un résultat important et largement commenté dans la littérature est dû à Butkovič and Hegedüs [13], qui ont établi que la famille des sous-demi-modules de $\mathbb{R}^n_{\max}$ de type fini coïncide avec la famille des cônes de type fini $\text{Cone}\,(C,D) = \{x \in \mathbb{R}^n_{\max} \mid Cx = Dx\}$, où C et D sont des matrices $p \times n$, pour un entier p. Cette remarque est formalisée dans l'énoncé suivant.

Théorème 2.1. *Un demi-module $\mathscr{M} \subset \mathbb{R}^n_{\max}$ étant donné, les affirmations suivantes sont équivalentes.*
(i) Il existe un entier q et une matrice $M \in \mathbb{R}^{n\times q}_{\max}$ telle que $\mathscr{M} = \text{Im}\,M$.
(ii) Il existe un entier p et des matrices $C, D \in \mathbb{R}^{p\times n}_{\max}$ telles que $\mathscr{M} = \text{Cone}\,(C,D)$.

Des algorithmes permettant de passer d'une représentation à l'autre sont introduits dans [13]. Ils ont été affinés par Allamigeon *et al.* [14]. Nous avons programmé ces algorithmes avec la boîte à outil Max-Plus incluse dans Scicoslab [33], pour traiter les exemples de la section 4 de cet article.

Allamigeon *et al.* [14] ont également décrit des algorithmes pour calculer les générateurs de polyhèdres max-plus, pour caractériser l'ensemble de tous les vecteurs x satisfaisant des inégalités de la forme $Ax \oplus c \leq Bx \oplus d$. Dans ce qui suit, nous aurons simplement besoin du résultat suivant, qui est bien connu, qui ne caractérise que l'existence d'au moins une solution à une égalité monolatère, à partir de sa plus grande sous-solution [12].

Théorème 2.2. *Des entiers q et n étant donnés, ainsi qu'une matrice $A \in \mathbb{R}^{q\times n}_{\max}$ et un vecteur $y \in \mathbb{R}^q_{\max}$, les affirmations suivantes sont équivalentes.*
(i) Il existe un vecteur $x \in \mathbb{R}^n_{\max}$ tel que $Ax = y$,
(ii) l'égalité $A \otimes (A^{-T} \otimes' y) = y$ est vérifiée.

2.1.1 Système max-plus linéaire

Un autre concept de base important est celui de système max-plus linéaire, qui est un système dynamique dont l'évolution est guidé par la loi de récurrence suivante

$$x(k+1) = A \otimes x(k) \oplus B \otimes u(k)\ , \tag{1}$$

où $A \in \mathbb{R}^{n\times n}_{\max}$ et $B \in \mathbb{R}^{n\times m}_{\max}$. La variable $x(k) \in \mathbb{R}^n_{\max}$ est le vecteur d'état et $u(k) \in \mathbb{R}^m_{\max}$ est l'entrée de commande, définis pour k entier et $k > 0$. La solution du système (1) est uniquement déterminée par la commande u et par la condition initiale $x_0 \in \mathbb{R}^n_{\max}$, telle que $x(1) = x_0$. Les composantes de $x(k)$ et $u(k)$ sont ici les dates d'événements, comme l'activation ou la désactivation d'une ressource.

2.2 Le concept d'invariance contrôlée

Dans cette section nous rapportons quelques résultats concernant l'invariance contrôlée dans $\mathbb{R}_{\max}$: spécifiquement les propriétés (i) et (ii) du théorème 2.3 qui suit a été énoncée par Katz [4], tandis que la propriété (iii) a été exprimée en [25].

Définition 2.1. (Invariance contrôlée) *Étant données les matrices $A \in \mathbb{R}^{n\times n}_{\max}$ et $B \in \mathbb{R}^{n\times m}_{\max}$, un demi-module $\mathscr{M} \in \mathbb{R}^n_{\max}$ est (A,B)-invariant, ou invariant contrôlé, si $\forall x_0 \in \mathscr{M}$, il existe une commande u telle que la solution unique du système (1) initialisé à x_0 vérifie $x(k) \in \mathscr{M}$, pour $k > 0$.*

Théorème 2.3. *Les propriétés suivantes sont vérifiées.*
(i) Un demi-module $\mathscr{M} \subset \mathbb{R}^n_{\max}$ est (A,B)-invariant [4] si et seulement si :

$$A\mathscr{M} \subset \mathscr{M} \ominus \text{Im}\,B\ ,$$

où $\mathscr{M} \ominus \text{Im}\,B$ est l'ensemble $\{x \in \mathbb{R}^n_{\max} \mid \exists b \in \text{Im}\,B,\ x \oplus b \in \mathscr{M}\}$.

(ii) Un demi-module $\mathscr{M} \subset \mathbb{R}^n_{\max}$ généré par une matrice $M \in \mathbb{R}^{n\times q}_{\max}$ est (A,B)-invariant [4] si et seulement s'il existe des matrices $U \in \mathbb{R}^{m\times q}_{\max}$ et $V \in \mathbb{R}^{q\times q}_{\max}$ telles que :

$$A \otimes M \oplus B \otimes U = M \otimes V.$$

(iii) Un demi-module $\mathscr{M} \subset \mathbb{R}^n_{\max}$ tel que $\mathscr{M} = \mathrm{Im}\, M = \mathrm{Cone}\,(C,D)$, où $M \in \mathbb{R}^{n\times q}_{\max}$ et $C,D \in \mathbb{R}^{p\times n}_{\max}$ est (A,B)-invariant si et seulement s'il existe une matrice $U \in \mathbb{R}^{m\times q}_{\max}$ telle que l'égalité suivante est vérifiée :

$$C(AM \oplus BU) = D(AM \oplus BU)\ .$$

La propriété (i) fonde l'approche géométrique de la commande, tandis que (ii) et (iii) fondent son approche algébrique. Elles sont établies de la même manière que dans le cas des systèmes sur un corps, en construisant les colonnes des matrices U et V avec des conditions initiales égales aux colonnes de M.

En résumant, on a vu que le module $\mathscr{M} = \mathrm{Im}\, M$ est invariant contrôlé, lorsqu'il existe des matrices U, V de dimensions adéquates telles que $AM \oplus BU = MV$. Sous ces conditions, toute loi de commande vérifiant :

$$\begin{cases} u(k) &=& Uv(k), \\ x(k) &=& Mv(k), \end{cases}$$

pour une séquence $v(k) \in \mathbb{R}^q_{\max}$, conduit aux égalités

$$x(k+1) = AMv(k) \oplus BUv(k) = (AM \oplus BU)v(k) = MVv(k)\ , \tag{2}$$

qui signifie que $x(k) \in \mathscr{M}$, pour $k \geq 1$, si $x(1) \in \mathscr{M}$. Dans ce cas, il existe un vecteur $v(1) \in \mathbb{R}^q_{\max}$ tel que $x(1) = Mv(1)$, et les séquences définies par $v(k+1) = Vv(k)$, pour $k \geq 2$, et $u(k) = Uv(k)$, pour $k \geq 1$, définissent une loi de commande qui rend le module $\mathscr{M}$ invariant pour le système en boucle fermée.

Définition 2.2. *Le module $\mathscr{M}$ est invariant par retour d'état statique s'il existe une loi de commande $u(k) = f(x(k))$ telle que la trajectoire du système bouclé reste dans $\mathscr{M}$ au cours de son évolution si $x(1)$ est elle-même un élément de $\mathscr{M}$. Dans ce cas, une telle fonction f est dite admissible pour $\mathscr{M}$.*

Théorème 2.4. *Étant donné un sous-demi module de type fini de $\mathbb{R}^n_{\max}$, soit $\mathscr{M} = \mathrm{Im}\, M$, avec $M \in \mathbb{R}^{n\times q}_{\max}$, ces deux affirmations sont équivalentes [25].*
(i) $\mathscr{M}$ est invariant contrôlé.
(ii) $\mathscr{M}$ est invariant par retour d'état statique.
Sous ces conditions, un retour d'état admissible maximal existe et il s'écrit :

$$u(k) = U \otimes M^\sharp(x(k)) = U \otimes (M^{-T} \otimes' x(k))\ ,$$

où U est la matrice des propriétés (ii) et (iii) du Théorème 2.3, et $M^\sharp(x(k))$ est définie par $(M^\sharp(x(k)))_i =$ $= (M^{-T} \otimes' x)_i = -\bigoplus_{j=1}^n \{M_{ji} - x_j(k)\}$, pour $i = 1$ à q.

2.3 Causalité et opérateurs causaux

Le concept de causalité, étudié en profondeur par Bousch [18], découle du fait que les fonctions modélisant l'évolution des systèmes à événements discrets possèdent non seulement les propriétés classiques de monotonie et d'homogénéité additive, mais elles ont généralement aussi une troisième propriété, qui exprime le caractère causal (c'est-à-dire non anticipatif) de la transformation.

Les opérateurs max-plus linéaires appartiennent aux opérateurs topicaux, qui sont formulées en utilisant les opérations *min*, *max* et *plus*. Une fonction topicale $u = \phi(x) : \mathbb{R}^n_{\max} \to \mathbb{R}_{\max}$ est représenté par l'infimum (symbole $\bigwedge$) de fonctions max-plus linéaires ou par le supremum (symbole $\bigvee$) de fonctions min-plus linéaires. Cela signifie que pour une fonction finiment générée, il existe des entiers q, r, et des matrices $\alpha \in \mathbb{R}_{\max}^{q\times n}$ et $\beta \in \mathbb{R}_{\max}^{r\times n}$ telles que

$$\phi(x) = \bigvee_{j=1}^{q} \bigwedge_{k=1}^{n} (\alpha_{jk} + x_k) = \bigwedge_{j=1}^{r} \bigvee_{k=1}^{n} (\beta_{jk} + x_k) \ . \tag{3}$$

Notre intérêt pour les opérateurs topicaux vient de ce que la loi de commande exprimée dans le théorème 2.4 relève de cette classe. Les fonctions de ce type sont monotones, i.e., $\forall x,\ x' \in \mathbb{R}_{\max}^n$ tels que $x \leq x'$, on a $\phi(x) \leq \phi(x')$, et additivement homogène, i.e., $\forall x \in \mathbb{R}_{\max}^n$ et $\forall \lambda \in \mathbb{R}_{\max}$, on a $\phi(\lambda \otimes x) = \lambda \otimes \phi(x)$.

De plus, l'opérateur $\phi(x)$ est causal si $\forall x,\ y \in \mathbb{R}_{\max}^n$, on observe pour toute date $\lambda \in \mathbb{R}_{\max}$ que $\phi x = \phi y < \lambda$ ou $\phi x,\ \phi y \geq \lambda$, si $x_i = y_i < \lambda$ ou $x_i,\ y_i \geq \lambda$, pour $i = 1$ à n.

Définition 2.3. *Une fonction ϕ de $\mathbb{R}_{\max}^n$ dans $\mathbb{R}_{\max}$ est causale si pour tout $\lambda \in \mathbb{R}_{\max}$, l'égalité $\min(x_i, \lambda) = \min(y_i, \lambda)$, pour $i = 1$ à n, implique que $\min(\phi(x), \lambda) = \min(\phi(y), \lambda)$. Une fonction multivariable est dite causale si toutes ses composantes sont causales.*

Ensuite, nous rappelons également quelques autres définitions et résultats de base.

Théorème 2.5. *Une fonction topicale ϕ de $\mathbb{R}_{\max}^n$ dans $\mathbb{R}_{\max}$ est causale si et seulement si pour tout $x \in \mathbb{R}_{\max}^n$, l'égalité $\phi(x \wedge 0) \geq \phi(x) \wedge 0$ est vérifiée.*

Théorème 2.6. *Une forme max-plus linéaire de $\mathbb{R}_{\max}^n$, de la forme $f(x) = v^T \otimes x$, ou $v \in \mathbb{R}_{\max}^n$, est causale si et seulement si le vecteur v est défini sur $\mathbb{R}_{\max}^{+n}$. Une fonction topicale $\phi : \mathbb{R}_{\max}^n \to \mathbb{R}_{\max}$ est causale si et seulement si elle est égale à l'infimum de fonctions max-plus causales.*

Bousch [18] parvient a une caractérisation explicite des fonctions topicales causales, en utilisant l'ensemble $\mathbb{R}_{\max}^+$ des réels positifs complété par $-\infty$. Cependant, les résultats présentés pour des fonctions topicales réelles, s'étendent également à $\mathbb{R}_{\max}$, en considérant la caractérisation alternative suivante.

Définition 2.4. *Le sous-demi-anneau des éléments causaux de $\mathbb{R}_{\max}$ se définit comme :*

$$\mathscr{C} = \mathbb{R}_{\max}^+ = \{x \in \mathbb{R}_{\max} \,|\, x \geq 0 \text{ or } x = \varepsilon\} \ .$$

Proposition 2.1. *Une fonction topicale ϕ définie sur $\mathbb{R}_{\max}^n$ et à valeurs dans $\mathbb{R}_{\max}$ est causale si pour tout vecteur $x \in \mathbb{R}_{\max}^n$ vérifiant $\bigoplus_{i=1}^n x_i = 0$, on a $\phi(x) \in \mathscr{C}$.*

3 Invariance causale contrôlée

3.1 Définition et condition suffisante

Le concept d'invariance causale contrôlée, bien qu'il ait déjà été présenté dans la littérature [25], est caractérisé par le biais de conditions suffisantes permettant de vérifier si un module possède cette propriété. Ces conditions suffisantes sont, en résumé, qu'il existe une matrice causale U telle que $AM \oplus BU$ ait ses colonnes dans $\mathrm{Im}\,M$.

Rappelons d'abord quelques définitions et résultats de base tirés de [25].

Définition 3.1. *On dit que le module $\mathscr{M} \subset \mathbb{R}_{\max}^n$ est un (A,B)-invariant causal, ou invariant causal contrôlé, s'il existe pour $\mathscr{M}$ une loi de commande admissible causale.*

Proposition 3.1. *Le retour d'état $u(k) = U(M^{-T} \otimes' x)$ du Théorème 2.4 est causal si les coefficients $U_{ij} - M_{kj}$ sont tous causaux, pour $i = 1$ à m, $j = 1$ à q et $k = 1$ à n, du moins si $M_{kj} \neq \varepsilon$.*

Définition 3.2. *On dit que la matrice M est normalisée si l'élément maximal de chacune de ses colonnes est égal à* 0*.*

Proposition 3.2. *Un module $\mathscr{M}$ finiment généré est (A,B)-invariant causal s'il existe une matrice U sur $\mathscr{C}$ et une matrice V satisfaisant les conditions du Théorème 2.3, la matrice M étant normalisée.*

3.2 Projections causale et R-causale

À ce stade, nous pouvons procéder à de nouvelles considérations. Malgré l'existence de conditions suffisantes pour l'invariance causale contrôlée d'un module, il n'existe pas encore de caractérisation ni d'algorithme conçu pour tester ces conditions suffisantes ou d'autres conditions équivalentes. En vue de développer un tel algorithme, nous avons d'abord introduit les résultats suivants, qui généralisent le théorème 2.2 pour caractériser l'existence de solutions causales à une égalité max-plus linéaire monolatère.

Théorème 3.1. *Pour toute matrice $A \in \mathbb{R}_{\max}^{q\times n}$ et tout vecteur $y \in \mathbb{R}_{\max}^{q}$, les énoncés suivants sont équivalents :*
(i) Il existe $x \in \mathscr{C}^n$ tel que $Ax = y$.
(ii) $AP_c(A^{-T} \otimes' y) = y$, où P_c est la projection causale définie comme :

$$P_c(x) = sup\{z \,|\, z \in \mathscr{C},\, z \leq x\}\ , \tag{4}$$

pour $x \in \mathscr{C}^n$. Autrement dit, on a :

$$(P_c(x))_i = \begin{cases} -\infty, & si\ x_i < 0, \\ x_i, & si\ x_i \geq 0\ . \end{cases}$$

Démonstration La preuve repose sur la chaîne d'inégalités suivante :

$$\begin{array}{ll} y = Ax & \text{, si } x \text{ est une solution de } Ax = y \\ \quad = AP_c(x) & \text{, si } x \text{ est une solution causale} \\ \quad \leq AP_c(A^{-T} \otimes' y) & \text{, car } x \leq A^{-T} \otimes' y\text{, si } Ax \leq y \\ \quad \leq A(A^{-T} \otimes' y) & \text{, par définition de } P_c \\ \quad \leq y & \text{, car } x \leq A^{-T} \otimes' y \text{ implique } Ax \leq y\text{, donc } A(A^{-T} \otimes' y) \leq y. \end{array}$$

Les deux extrémités de la chaîne étant identiques, on déduit que tous ses termes sont égaux, d'où découle l'égalité (ii) du théorème. Cela montre que cette affirmation est impliquée par (i). La réciproque est immédiate, car $x = A^{-T} \otimes' y$ est solution si (ii) est vérifiée. □

Ce résultat peut être étendu à une équation de la forme $Ax \oplus b = y$.

Théorème 3.2. *Pour toute matrice $A \in \mathbb{R}_{\max}^{q\times n}$ et les vecteurs $b, y \in \mathbb{R}_{\max}^{q}$, nous avons les équivalences suivantes :*
(i) Il existe $x \in \mathscr{C}^n$ tel que $Ax \oplus b = y$.
(ii) $AP_c(A^{-T} \otimes' y) \oplus b = y$.

Démonstration La preuve est basée sur la même chaîne d'inégalités :

$$\begin{array}{ll} y = Ax \oplus b & \text{, si } x \text{ est une solution de } Ax \oplus b = y \\ \quad = AP_c(x) \oplus b & \text{, si } x \text{ est une solution causale} \\ \quad \leq AP_c(A^{-T} \otimes' y) \oplus b & \text{, car } x \leq A^{-T} \otimes' y\text{, si } Ax \leq y \\ \quad \leq A(A^{-T} \otimes' y) \oplus b & \text{, par définition de } P_c \\ \quad \leq y & \text{, car } A(A^{-T} \otimes' y) \leq y \text{ et } b \leq y\text{, si } Ax \oplus b \leq y. \end{array}$$

Le théorème est déduit comme précédemment. □

Les deux résultats précédents sont inspirés de ceux de Cottenceau [19], qui étaient établis pour des séries formelles associées à un systèmes max-plus linéaire. Nous introduisons maintenant la notion de projection relative à une matrice R, ou R-projection, en vue de formuler un test pour vérifier l'existence d'une solution causale telle qu'évoquée dans la proposition 3.2.

Théorème 3.3. *Étant donnés des entiers n, m, p, et q, et des matrices $H \in \mathbb{R}_{\max}^{n\times p}$, $M \in \mathbb{R}_{\max}^{n\times q}$, et $R \in \mathbb{R}_{\max}^{m\times p}$, il existe une matrice W telle que $HW = M$ et RW soit causale, dans $\mathscr{C}^{n\times q}$, si et seulement si l'égalité suivante est vérifiée :*

$$HP_C^R(H^{-T} \otimes' M) = M \;, \tag{5}$$

où la projection causale relative à une matrice R, ou R-projection, est définie comme $P_c^R : \mathbb{R}_{\max}^q \to \mathbb{R}_{\max}^q$, par :

$$\forall w \in \mathbb{R}_{\max}^q \;,\; P_c^R(w) = sup\{z \in \mathbb{R}_{\max}^q \mid Rz \in \mathscr{C}^n, z \leq w\} \;. \tag{6}$$

Démonstration Cela suit la même logique que précédemment. Formellement, la matrice $H^{-T} \otimes' M$ est définie sur $\overline{\mathbb{R}}_{\max}$, ainsi que sa projection. Celle-ci est définie colonne par colonne. Si l'égalité du théorème est vérifiée, alors $W = P_C^R(H^{-T} \otimes' M)$ est une solution de $HW = M$ telle que RW soit causale, par définition de la projection P_C^R. Réciproquement, si $M = HW$ avec RW causale, nous avons successivement les inégalités suivantes :

$$\begin{array}{ll} M = HW & \text{, avec } RW \text{ causale} \\ \quad = HP_C^R(W) & \text{, puisque } RW \text{ est causale donc } P_C^R(W) = W \\ \quad \leq HP_C^R(H^{-T} \otimes' M) & \text{, car } HW \leq M \text{ donc } W \leq H^{-T} \otimes' M \text{ et } P_C^R \text{ est isotone} \\ \quad \leq H(H^{-T} \otimes' M) & \text{, car } \forall z,\ P_C^R(z) \leq z \\ \quad \leq M & \text{, car } z = H^{-T} \otimes' M \text{ satisfait } Hz \leq M. \end{array}$$

Cette chaîne d'inégalités a des extrémités identiques, ce qui signifie que tous les termes sont activement égaux, et en particulier $HP_C^R(H^{-T} \otimes' M) = M$, ce qui conclut la preuve. □

Nous sommes maintenant en mesure d'introduire un algorithme pour la vérification des conditions de la proposition 3.2.

3.3 Algorithme

Finalement, on voit que le théorème 3.3 permet la vérification effective des conditions suffisantes de la proposition 3.2. Ceci est exprimé dans l'énoncé suivant.

Proposition 3.3. *Étant données les matrices A, B, et M définies comme précédemment, soient H, R, et V les matrices telles que*

$$\mathrm{Im}\begin{pmatrix} H \\ R \\ V \end{pmatrix} = \mathrm{Cone}\Big(\begin{pmatrix} A & B & \varepsilon \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \varepsilon & \varepsilon & M \end{pmatrix}\Big) \;,$$

alors les conditions de la proposition 3.2, suffisantes pour que ImM *soit invariant causal contrôlé, sont satisfaites si et seulement si le sont celles du théorème 3.3.*

Démonstration La condition de la proposition 3.2 est qu'il existe une matrice causale U et une matrice X telles que $AM \oplus BU = MX$. Cela conduit à s'intéresser au module des solutions (Y, U, X) de l'identité $AY \oplus BU = MX$. Si les matrices H, R, et V sont comme définies dans l'énoncé, alors les solutions sont paramétrées sous la forme

$$\begin{pmatrix} Y \\ U \\ X \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} H \\ R \\ V \end{pmatrix} W \;,$$

où W est une matrice de paramètre libre. Tester l'invariance causale contrôlée de $\mathrm{Im}M$ revient alors à vérifier l'existence d'une matrice W de taille adéquate telle que $HW = M$, et telle que RW soit causale, ce qui est l'objet du théorème 3.3, et achève la démonstration. □

La vérification de la condition suffisante de la proposition 3.2 s'effectue donc en testant l'égalité $HP_C^R(H^{-T} \otimes' M) = M$. En pratique, l'algorithme s'effectue en deux étapes, qui sont les suivantes :

- À partir des matrices A, B et M, calculer les matrices H, R, et V,
- vérifier finalement s'il existe ou non une telle W tel que RW soit causal et $HW = M$.

La première étape de cette procédure est réalisable en utilisant l'algorithme d'Allamigeon *et al.* [14]. Les calculs sont d'une complexité élevée, mais les résultats sont des matrices d'ordre fini. Le dernier point consiste à calculer effectivement la projection $P_C^R(W)$ d'une matrice donnée $W \in \mathbb{R}_{max}^{p\times q}$. La R-projection d'une matrice s'effectue colonne par colonne, à partir des colonnes w de la matrice W, pour lesquelles $P_c^R(w) = sup\{z \in \mathbb{R}_{\max}^p \mid Rz \in \mathscr{C}^m, z \leq w\}$. Dans ce but, nous établissons quelques propriétés élémentaires de la R-projection.

Proposition 3.4. *Les propriétés suivantes sont vérifiées.*
(i) Un scalaire $z \in \mathbb{R}_{max}$ est causal si et seulement si $z \leq z^2$.
(ii) Avec la notation $(v^2)_i = v_i^2$, pour un vecteur v, on a aussi que v est causal si et seulement si $v \leq v^2$.
(iii) Si R n'est que une ligne, alors

$$P_c^R(w) = \begin{cases} w & , si\ Rw\ est\ causal, \\ z & , else, \end{cases} \tag{7}$$

où z est défini par :

$$z_i = \begin{cases} w_i & , si\ R_{1i} = -\infty, \\ -\infty & , si\ R_{1i} + w_i < 0,\ et\ R_{1i} \neq -\infty. \end{cases} \tag{8}$$

(iv) Dans le cas d'une matrice, on calcule la R-projection en appliquant successivement la procédure pour toutes les lignes, de la première à la dernière, puis en recommençant ce calcul jusqu'à ce que les lignes ne soient plus modifiées.

Démonstration (i) et (ii) se vérifient directement. Pour montrer (iii), on remarque que Hw n'est pas causal, donc $-\infty < \max_{i|R_{1i}\neq\varepsilon}(R_{1i} + w_i) < 0$, donc il existe bien des indices i tels que $R_{1i} + w_i$ est negatif. Dans le cas (iv) d'une matrice, on peut appliquer successivement la même procédure pour chaque ligne, jusqu'à convergence. À chaque étape de la procédure, on annule certains coefficients du vecteur. Du fait que le nombre de lignes et de coefficients sont finis, la matrice W étant de taille $p \times q$, la convergence est assurée en un maximum de $p \times q$ étapes. □

Ces remarques conduisent à une procédure de calcul effective. L'algorithme résultant est donné ici dans le tableau appelé Algorithme 1.

4 Exemples

Dans cette section, nous présentons quelques exemples obtenus avec l'algorithme décrit, implémenté dans le logiciel ScicosLab.
Il convient de mentionner qu'avant d'utiliser l'algorithme, il est bien sûr nécessaire d'ajouter une partie préliminaire dans le code permettant à l'utilisateur de définir les matrices A, B et M, afin de calculer ensuite $(H \quad R \quad V)'$ et les générateurs w_i, comme expliqué dans la section 3.3.

Algorithme 1 L'algorithme de calcul de la R-projection d'une matrice W

```
function PcR(W,R)
    [nlin,ncol] ← size(R)
    pout ← Twin(SingLPcR(W,R(1,:)))
    for i = 2 to nlin do
        z ← SingLPcR(W,R(i,:))
        pout ← pout + Twin(z)
    pout ← Twin(pout)
    return pout

function SingLPcR(W,R)
    [nlin,ncol] ← size(W)
    pout ← zeros(nlin,ncol)
    i ← 1
    for j = 1 to nlin do
        if full(R(i,j)·W(j,i)) ≤ full((R(i,j)·W(j,i))·(R(i,j)·W(j,i))) then
            pout(j,i) ← W(j,i)
    return pout

function Twin(M)
    N ← maxplus(−plustimes(full(M)))
    return N
```

4.1 Exemple 1

Le premier exemple concerne les matrices suivantes et dans ce cas, ImM est invariant contrôlé mais pas causalement, et le test avec P_c^R le confirme. Les données d'entrée utilisées sont les suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & . \\ . & 0 & . \\ 0 & . & 0 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 4 & 5 \\ 5 & 6 \end{pmatrix} \quad M = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -1 & -3 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

ce qui conduit au système suivant :

$$X(k+1) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & . \\ . & 0 & . \\ 0 & . & 0 \end{pmatrix} X(k) + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 4 & 5 \\ 5 & 6 \end{pmatrix} U(k)$$

Voici ce qui a été obtenu avec l'algorithme et affiché dans le presse-papiers de ScicosLab. Nous évitons de montrer les matrices P et Q, car elles n'ajoutent pas d'informations sur les résultats obtenus.

$$U = \begin{pmatrix} -4 & -4 \\ -5 & -5 \end{pmatrix}$$

```
Is M A invariant?  F
Is P*A*M <= (Q*A*M) + Q*B*U?  T
Is Q*A*M <= (P*A*M) + P*B*U?  T
Is M A-B invariant?  T
```

```
H*PcR(H(-t)\otimesmin M) = M ?
F F
T T
T T
```

$$H = \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 & -2 & -2 & -2 & -1 & -4 & -1 & -1 & -4 & -4 \\ . & . & . & -2 & . & . & . & -6 & -1 & -1 & . & . \\ . & . & . & -1 & -1 & -1 & . & -3 & . & . & -3 & -3 \end{pmatrix}$$

$$R = \begin{pmatrix} . & -5 & . & . & -6 & . & -5 & . & . & -5 & -10 & . \\ -6 & . & -6 & . & . & -7 & . & . & -6 & . & . & -11 \end{pmatrix}$$

$$V = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & -1 & 0 & . & 0 & 0 & . & . \\ 0 & . & . & . & . & . & 0 & -3 & . & . & -3 & -3 \end{pmatrix}$$

$$H * P_C^R(H^{-T} \otimes' M) = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -1 & -3 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Comme on peut le voir sur les dernières lignes, qui correspondent au résultat du Théorème 3.3, on confirme que ImM n'est pas causalement invariant contrôlé, à la fois parce que U n'est pas causal et parce que certaines équivalences ne sont pas respectées : il y a en fait des valeurs Fausse (`F`) alors que, pour avoir l'invariance causale contrôlée, toutes les composantes devraient être égales à Vrai (`T`).

4.2 Exemple 2

Dans cet exemple, nous avons considéré des matrices différentes A et B par rapport à l'exemple 1 de la section 4.1. Cependant, la même matrice M a été utilisée et dans ce cas, ImM est invariante contrôlée et également causale. Les données d'entrée utilisées sont les suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ . & 0 & . \\ 0 & . & 0 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ . & 3 \end{pmatrix} \quad M = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -1 & -3 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Dans ce cas, voici ce qui a été obtenu avec l'algorithme :

$$U = \begin{pmatrix} 6 & 6 \\ 4 & 4 \end{pmatrix}$$

```
Is M A invariant?  T
Is P*A*M <= (Q*A*M) + Q*B*U?  T
Is Q*A*M <= (P*A*M) + P*B*U?  T
Is M A-B invariant?  T

H*PcR(H(-t)\otimesmin M) = M ?
T T
T T
T T
```

$$H = \begin{pmatrix} . & -1 & . & -1 & . & . & . & 0 & . & . & . & 0 & . & -1 & -1 & . \\ . & -4 & -4 & . & . & -1 & . & . & . & -1 & . & . & . & -2 & . & -2 \\ . & . & -1 & . & -1 & . & -1 & . & 0 & . & . & . & 0 & . & . & -1 \end{pmatrix}$$

$$R = \begin{pmatrix} -1 & . & . & -4 & -4 & . & -2 & . & . & . & -1 & . & . & . & -2 & . \\ -3 & . & . & . & . & -3 & . & -4 & -4 & -3 & -3 & -3 & -3 & . & . & . \end{pmatrix}$$

$$V = \begin{pmatrix} 0 & . & . & . & . & 0 & -1 & . & . & 0 & 0 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & -1 & -1 & 0 & . & 0 & 0 & . & . & 0 & 0 & . & . & . \end{pmatrix}$$

$$H * P_C^R(H^{-T} \otimes' M) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -1 & -3 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

4.3 Exemple 3

Dans cet exemple, nous avons différentes matrices A, B et M. Ce cas représente la situation où il existe une loi de commande causale U, mais seulement une partie de l'état est utilisée. En effet, si nous regardons la matrice A, elle a une colonne composée uniquement d'éléments ε et ici, même si la matrice U est causale et l'image ImM est invariante contrôlée, cette dernière ne satisfait pas le critère d'invariance causale, tel que défini dans cet article.

Les données d'entrée sont les suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & . & 4 \\ 1 & . & 0 \\ 0 & . & 1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 4 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad M = \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 0 & 0 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}$$

Les réponses de l'algorithme sont à la place présentées ci-dessous :

$$U = \begin{pmatrix} 5 & 5 \\ 6 & 6 \end{pmatrix}$$

```
Is M A invariant?  F
Is P*A*M <= (Q*A*M) + Q*B*U?  T
Is Q*A*M <= (P*A*M) + P*B*U?  T
Is M A-B invariant?  T

H*PcR(H(-t)\otimesmin M) = M ?
F F
T T
T F
```

$$H * P_C^R(H^{-T} \otimes' M) = \begin{pmatrix} . & . \\ 0 & 0 \\ 0 & . \end{pmatrix}$$

Ceci est un exemple de module invariant causal contrôlé, mais l'égalité (5) du théorème 3.3 n'est pas satisfaite. Cela illustre que les conditions de la proposition 3.2 ne sont que suffisantes.

5 Conclusions

Dans cet article, nous avons approfondi le concept d'invariance causale contrôlée pour les systèmes linéaires max-plus, en mettant l'accent sur ses implications théoriques et pratiques. Cette notion s'est avérée très utile et applicable à un large éventail de problèmes de contrôle dans de tels systèmes, en particulier pour la mise en œuvre en ligne de lois de commande.

Une vue d'ensemble avec des rappels sur les concepts clés et les résultats de base a été fournie, en se référant à l'algèbre max-plus et aux systèmes max-plus linéaires, ainsi qu'aux concepts d'invariance contrôlée et de causalité. De plus, ce travail contribue à la littérature existante en apportant des éclaircissements sur le sujet de l'invariance causale contrôlée, pour lequel aucun algorithme n'a été conçu jusqu'à présent pour tester les conditions suffisantes déjà définies dans la littérature scientifique ou d'autres conditions équivalentes, telles que celles introduites ici. Cependant, il est important de noter que nos résultats actuels reposent sur des conditions suffisantes pour l'invariance causale contrôlée et la recherche de conditions nécessaires et suffisantes demeure une direction prometteuse pour de futures avancées dans ce domaine.

Après quelques considérations sur ce sujet et quelques calculs, nous avons présenté un algorithme, basé sur le concept de projection causale, pour vérifier cette propriété. L'algorithme développé peut ainsi être un outil valable pour vérifier si un module satisfait ou non la propriété d'invariance causale contrôlée, ou en d'autres termes, si une rétroaction d'état causale existe et rend le module invariant pour le système en boucle fermée.

Quelques exemples illustratifs ont été présentés pour valider les équivalences théoriques fournies à partir desquelles l'algorithme est issu et pour confirmer, en utilisant l'algorithme lui-même, si les modules considérés étaient effectivement invariant causaux contrôlés.

6 Acknowledgments

Les auteurs tiennent à remercier chaleureusement le professeur G. Conte du Département d'Ingénierie de l'Information de l'Università Politecnica delle Marche pour ses discussions et précieuses suggestions qui nous ont été très utiles dans la préparation de cette communication.

Références

[1] W. M. Wonham, *Linear Multivariable Control : A Geometric Approach*, 3rd ed. New York : Springer-Verlag, 1985.

[2] G. Basile, G. Marro, *Controlled and Conditioned Invariant in Linear System Theory*, Prentice Hall, Englewood Cliffs, New York, 1992.

[3] M. L. J. Hautus, *Controlled invariance in systems over ring*, D. Hinrichsen, and A. Isidori (Eds.), Proceeding of the Joint Workshop on Feedback and Synthesis of Linear and Nonlinear Systems, Lecture Notes in Control and information Sci., vol 39, Springer, New York, pp. 107-122, 1982.

[4] R. Katz, *Max-plus (A, B)-invariant spaces and control of timed discrete-event systems*, IEEE Trans. Automatic Control, Vol. 52, pp. 229-241, 2007.

[5] G. Conte, A. M. Perdon, *The disturbance decoupling problem for systems over ring*, SIAM J. Control Optim., Vol. 33, pp. 750-764, 1995.

[6] G. Basile, G. Marro, *Controlled and conditioned invariant subspaces in linear system theory*, J. Opt. Th. & Appl., Vol. 33, pp. 306-315, 1969.

[7] W. M. Wonham, A. S. Morse, *Decoupling and pole assignment in linear multivariable systems : a geometric approach*, SIAM J. Control , Vol. 8, pp. 1-18, 1970.

[8] N. Ito, H. Inaba, *Dynamic feedback (A,B)-invariance of submodules for linear systems over commutative Noetherian domains* , Lin. Algebra Appl. 282 , pp. 123-129, 1998.

[9] M. Di Loreto, S. Gaubert, R. D. Katz, J. J. Loiseau, *Duality between invariant spaces for max-plus linear discrete event systems*, SIAM J. Control Optim., Vol. 48, pp. 5606-5628, 2010.

[10] L. Hardouin, Y. Shang, C.-A. Maia, B. Cottenceau, *Observer-based controllers for max-plus linear systems*, IEEE Trans. Automatic Control, Vol. 62, pp. 2153-2165, 2017.

[11] C. Cardenas, J. J. Loiseau, C. Martinez, *Controlled invariance and dynamic feedback for systems over semirings*, in : Proceedings SIAM Conference on Control Systems, SIAM CCS 2015, Paris, 2015.

[12] F. Baccelli, G. Cohen, G. J. Olsder, J.-P. Quadrat, *Synchronization and Linearity : An Algebra for Discrete Event Systems*, Wiley, Chichester, UK, 1992.

[13] P. Butkovič, G. Hegedüs, *An elimination method for finding all solutions of the system of linear equations over an extremal algebra*, Ekonomicko-matematicky Obzor, Vol. 20, no. 2, pp. 203-215, 1984.

[14] X. Allamigeon, S. Gaubert, É. Goubault, *The tropical double description method*, Proceedings of the 27th Annual Symposium on the Theoretical Aspects of Computer Science STACS, Nancy, France. pp.47-58, 2010.

[15] C. Maia, C. R. Andrade, L. Hardouin, *On the control of max-plus linear systems subject to state restriction*, Automatica, Vol. 47, pp. 988-992, 2011.

[16] V. M. Mariano Gonçalves, C. A. Maia, L. Hardouin, *On max-plus dynamical system theory : the regulation problem*, Automatica, Vol. 75, pp. 202-209, 2017.

[17] S. Amari, I. Demongodin, J. J. Loiseau, C. Martinez, *Max-plus control design for temporal constraints meeting in timed event graphs*, IEEE Trans. Automatic Control, Vol. 57, pp. 462-467, 2012.

[18] T. Bousch, *Fonctions topicales et causalité*, Bulletin of the Belgian Mathematical Society – Simon Stevin, Vol. 13, pp. 489-498, 2006.

[19] B. Cottenceau, L. Hardouin, J.-L. Boimond, J.-L. Ferrier, *Synthesis of greatest linear feedback for timed-event graphs in dioid*, IEEE Trans. Automatic Control, Vol. 44, pp. 1258-1262, 1999.

[20] C. Cárdenas, J. Cardillo, J. J. Loiseau, C. Martinez, *Control Problem in Max Plus Linear Model with Temporal Constraints*. Revista Iberoamericana de Automatica e Informatica Industrial, Vol. 13, pp. 438-449, 2016.

[21] V. M. Gonçalves, C. A. Maia, L. Hardouin, *On the Steady-State Control of Timed Event Graphs With Firing Date Constraints*, IEEE Transactions on Automatic Control, Vol. 61, pp. 2187-2202, 2016.

[22] R. Jacob, S. Amari, *Output feedback control of discrete processes under time constraint : application to cluster tools*, International Journal of Computer Integrated Manufacturing, Vol. 30, pp. 880-894, 2017.

[23] C. Kim, T.-E. Lee, *Feedback control of cluster tools for regulating wafer delays*, IEEE Transactions on Automation Science and Engineering, Vol. 13, No. 2, pp. 1189-1199, 2016.

[24] M. Ahmane and L. Truffet, *State Feedback Control via Positive Invariance for Max-plus Linear Systems using Γ-algorithm*, IEEE Conference on Emerging Technologies and Factory Automation, 2006, pp.217-224.

[25] C. Cárdenas, J. J Loiseau, C. Martinez, *Invariance par retour d'état sur le demi-anneau max-plus*, Modélisation des Systèmes Réactifs (MSR), Marseille, 2017.

[26] C. Martinez, R. Kara, A.N. Abdesselam and J.J Loiseau, *Systems synchronisation in Max-Plus algebra : a controlled invariance perspective In memoriam Édouard Wagneur*, 1st IFAC Workshop on Control of Complex Systems, COSY), Vol.55, Issue 40, Bologna, Italy, pp.1-6, 2022.

[27] X. Allamigeon, S. Gaubert and É Goubault, *Computing the Vertices of Tropical Polyhedra Using Directed Hypergraphs*, Discrete & Computational Geometry, Vol.49, pp.247–279, 2013.

[28] P. Declerck, *Causality phenomenon and Compromise Technique for Predictive Control of Timed Event Graphs with Specifications Defined by P-time Event Graphs*, 12th IFAC International Workshop on Discrete Event Systems, Vol. 47, Issue 2, pp.99-104, 2014.

[29] G. Conte, A.M. Perdon, E. Zattoni, *Model Matching Problems for Positive Systems*, 21st IFAC World Congress, Vol.53, Issue 2, pp.4648-4653, 2020.

[30] V.M. Gonçalves, C.A. Maia, L. Hardouin, *On Max-plus linear dynamical system theory : The observation problem*, Automatica, Vol.105, pp 103-111, 2019

[31] L. Hardouin, C.A. Maia, B. Cottenceau and R. Santos Mendes, *Max-plus Linear Observer : Application to manufacturing Systems*, Workshop on Discrete Event Systems, WODES, pp 171-176, 2010.

[32] S. Gaubert and R. Katz, *Rational semimodules over the max-plus semiring and geometric approach to discrete event systems*, Kybernetika Vol.40, pp. 153- 180, 2004.

[33] G. Cohen, S. Gaubert, M. McGettrick and J.-P. Quadrat, *Max-plus toolbox of Scilab*, see `http://atoms.scilab.org/toolboxes/max_plus_algebra/1.02`, now integrated into ScicosLab `http://www.scicoslab.org`.